Übungen zur Theoretischen Physik Ia: Klassische Mechanik

Probeklausur

SoSe 25

Prof. Dr. V. Braun

Blatt 12 — Ausgabe: 08.07.2025 — Abgabe: 14.07-18.07.2025

Aufgabe 38: 24 P

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich in einer Dimension in einem Potential

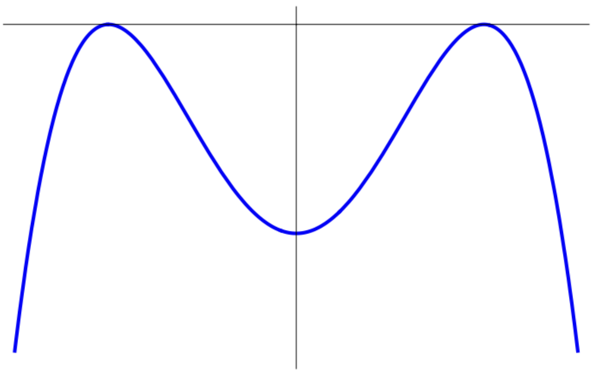
$$U(x) = -\lambda(x^2 - a^2)^2, \qquad \lambda > 0$$

siehe Abbildung.

a) Beschreiben Sie anhand von der Abbildung die erlaubten Bewegungen für die folgenden Werte der Energie E:
$E < -\lambda a^4$, $-\lambda a^4 < E < 0$, $E > 0$.

b) Stellen Sie Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese für den Fall, dass die Bewegung beschränkt ist auf einen Bereich, in welchem $|x| \ll a$.

c) Betrachten Sie ein Teilchen mit Energie $E = 0$. In diesem Fall existieren zwei "triviale" Lösungen der Bewegungsgleichungen. Diese sind die "Bewegungen", wo das Teilchen auf den jeweiligen zwei Maxima ruht, d.h. $x(t) = \pm a$. Desweiteren exisitieren zwei nicht-triviale Lösungen, welche die Bewegungen beschreiben, wo das Teilchen von einem Maxima zu dem Anderen wandert. Finden Sie diese Lösungen.

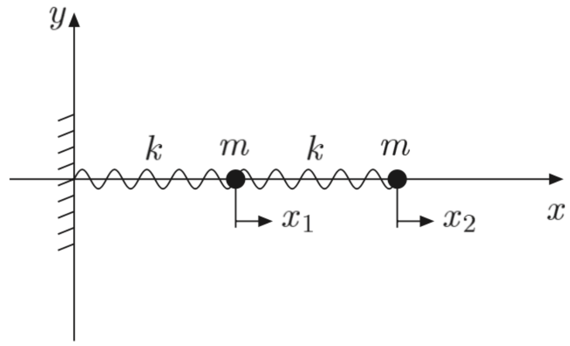


Hinweise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{arctanh}(x)\,, \qquad x < 1$$

Aufgabe 39: Gekoppelte Oszillatoren 24 P

Betrachten Sie nebenstehend skizziertes System aus zwei gekoppelten Oszillatoren. Die Federn haben die Federkonstante k, die Massenpunkte jeweils die Masse m. Es wirke keine Schwerkraft.

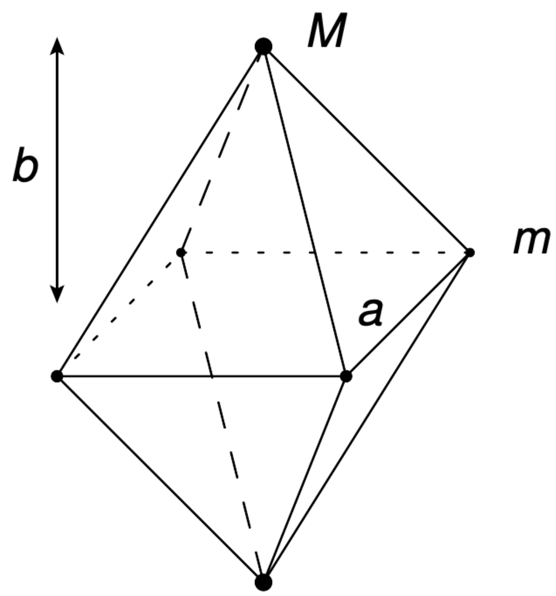


a) Stellen Sie die Lagrangefunktion und Bewegungsgleichungen auf.

b) Finden Sie die Eigenfrequenzen sowie Normalkoordinaten und geben Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen an.

Aufgabe 40: Trägheitstensor einer Doppelpyramide 16 P

Eine quadratische, symmetrische Doppelpyramide mit Seitenlänge a und halber Höhe b besteht aus vier gleichen Massen m an den Ecken des Quadrats und jeweils einer Masse M an der oberen und unteren Spitze. Alle Massen sind durch masselose, starre Stäbe miteinander verbunden.



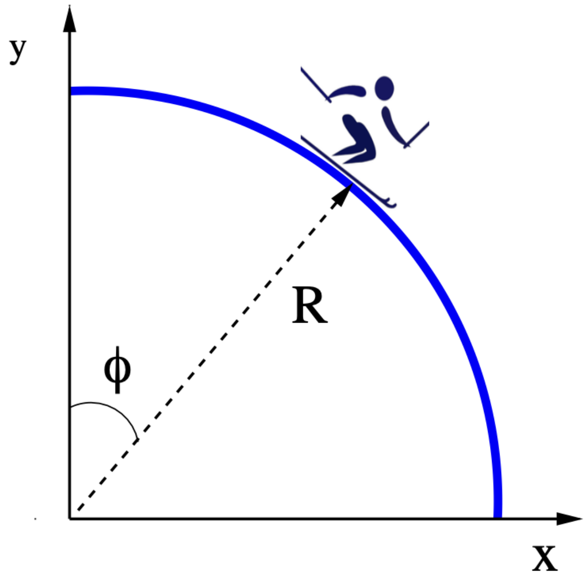
a) Berechnen Sie den Trägheitstensor der Doppelpyramide relativ zu ihrem Schwerpunkt.

b) Wie groß müsste b bei festem a, m und M sein, damit das Verhältnis der Hauptträgheitsmomente das Gleiche wie beim Würfel ist?

Aufgabe 41: Skispringer

24 P

Ein Skispringer gleitet reibungsfrei mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit einer halbkugelförmigen Sprungschanze hinab, siehe Abbildung.



a) Finden Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten (r, ϕ)

b) Stellen Sie die Zwangsbedingungen und Lagrange Gleichungen erster Art auf.

c) An welcher Stelle hebt er ab? Wie groß ist die Zwangskraft an dem Abhebepunkt?

Hinweise:
Für Aufgabe **c)**, finden Sie die Zwangskraft als Funktion von $\phi(t)$. Energieerhaltung kann helfen um die Zeitableitung $\dot{\phi}(t)$ als Funktion von $\phi(t)$ zu bestimmen.

Aufgabe 42: Mandelstam Variablen

12 P

Betrachten Sie einen Prozess bei dem zwei Teilchen mit Momenta p_1^μ und p_2^μ und Massen m_1 und m_2 kollidieren und zwei neue Teilchen erzeugen mit Momenta p_3^μ und p_4^μ und Massen m_3 und m_4. Mandelstam hat vorgeschlagen folgende Variablen für die Beschreibung dieses Prozesses zu benutzen

$$s = (p_1 + p_2)^2, \qquad t = (p_1 - p_3)^2, \qquad u = (p_1 - p_4)^2 \,.$$

Zeigen Sie, dass

$$s + t + u = c^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)$$